

Teorie k početní části

Matematika 2, 2022/23
výťah teorie ze cvičení

Parciální derivace (10 bodů)

Tabulka s derivacemi.

Návod

- $D(f)$ - určit a nakreslit
- určit, zda je funkce definovaná po větvích - v tom případě si nakreslím množiny, na kterých má různé předpisy
- zjistím, zda a kde je funkce spojitá (potřeba např. k větě 44)
- ve vnitřních získaných množin vypočítám parciální derivace
- pokud je funkce na hranicích množin definována, spočtu zde derivace zvlášť - z definice/dle věty 44.
 - Aby parciální derivace dávala smysl, musí být funkce definována na úsečce procházející daným bodem v příhodném směru (např., pokud funkce není těsně nad bodem x definována, nemá smysl tam počítat derivaci podle y .)

Definice (Parciální derivace). Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme *parciální derivací (prvního řádu) funkce f* podle j -té proměnné v bodě a (pokud limita existuje).

Aritmetika derivací: $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Derivace složené funkce: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Věta 44 - ZS (Výpočet jednostranné derivace). Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Definice (Tečná nadrovina). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je *tečná nadrovina* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Implicitně zadaná funkce (10 bodů)

Návod

- anulujeme rovnici a nenulovou stranu označíme jako F
- spočteme parciální derivace F
- ověříme předpoklady věty 22, resp. věty 23
- dle věty 22, resp. 23, spočteme φ' , resp. φ', ψ' pomocí násl.
 - pomocí řetízkového pravidla
 - metodou: zderivuji rovnost $F(x, \varphi(x)) = 0$ podle příslušné proměnné, vyjádřím φ'
- dosadíme spočtené do tečné nadroviny z definice

Věta 20 (derivace složené funkce). Necht' $r, s \in \mathbb{N}$ a necht' $G \subset \mathbb{R}^s, H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Necht' $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G), f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$. Potom složená funkce $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)), x \in G,$$

je třídy C^1 na G . Necht' $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 21 (záměnnost parciálních derivací). Necht' $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě a spojité. Pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Věta 22 (o implicitní funkci). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

- (i) $F \in C^1(G)$,
- (ii) $F(x_0, y_0) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li tot y jako $\varphi(x)$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \text{ pro } x \in U, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Poznámka. Vždy platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

Věta 23 (O dvou implicitních funkcích). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

(a) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,

(b) $F_1(x_0, y_0) = 0, F_2(x_0, y_0) = 0$ a

(c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}(x_0, y_0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) \neq 0.$

Potom existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}^2$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F_1(x, y) = 0 = F_2(x, y)$. Můžeme tedy reprezentovat $[y_1, y_2] = [\varphi(x), \psi(x)]$ pro nějaké funkce $\varphi, \psi \in C^k(U)$.

Poznámka. Obvykle dostaneme soustavu rovnic o proměnných x, y, u, v . Pak bod x_0 v větě výše je z našeho zadání $[x_0, y_0]$ a bod y_0 je z našeho zadání bod $[u_0, v_0]$. Vždy platí $\varphi(x_0, y_0) = u_0, \psi(x_0, y_0) = v_0$ a $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$ na jistém okolí $[x_0, y_0]$.

Definice (Tečná nadrovina). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n, a \in G, f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je *tečná nadrovina* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Poznámka (Prohození souřadnic). Chceme-li ukázat, že zadaná rovnost určuje implicitně zadanou funkci jiných proměnných, než obvykle, stačí v postupu prohodit souřadnice. Vizte příklad níže.

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné y . (nikoli proměnné x).

Postup bude stejný, akorát tam, v postupu prohodíme výskyty F'_x, F'_y - tj. při ověřování (iii) ve větě 22 budeme zjišťovat, zda $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ atd.

Extrémy funkce více proměnných (15 bodů)

Množiny v $\mathbb{R}^n$

Značení. Namísto $x \in \mathbb{R}^n : V(x)$, kde $V(x)$ je nějaká vlastnost pro bod $x \in \mathbb{R}^n$, budeme psát $[V(x)]$.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$.

Bod $x \in \mathbb{R}^n$ je

- *vnitřní bod* množiny M , pokud $\exists r > 0 : B(x, r) \subset M$
- *hraniční bod* množiny M , pokud $\forall r > 0 : B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Dále $\text{Int } M = [x \text{ je vnitřní bod mn. } M]$ je *vnitřek množiny* M a $H(M) = [x \text{ je hraniční bod mn. } M]$ je *hranice množiny* M . *Uzávěr* množiny M je množina $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$.

Množina M je *otevřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem. Množina M je *uzavřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $H(M) \subset M$ (respektive, pokud $\overline{M} = M$).

Věta 4. $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená $\iff \mathbb{R}^n \setminus M$ uzavřená a naopak.

Věta 2, 5 (vlastnosti otevřených a uzavřených množin). V $\mathbb{R}^n$ platí:

- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolné sjednocení otevřených, konečný průnik otevřených jsou **otevřené** množiny
- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolný průnik uzavřených, konečné sjednocení uzavřených jsou **uzavřené** množiny

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- množiny $[f > c], [f < c]$ jsou otevřené,
- množiny $[f \leq c], [f \geq c], [f = c]$ jsou uzavřené.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud existuje $r > 0$ t.ž. $M \subset B(0, r)$.

Věta 12 (Charakterizace kompaktních množin). Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Extrémy

Návod

- vyšetřím kompaktnost M - věta 14
- vyšetřím f na $\text{Int } M$ - věta 16
- vyšetřím f na $H(M)$
 - multiplikátory - věty 24, 25 (pozor je potřeba, aby G otevřená $\implies$ řešíme na $\text{Int } G$ a případně vyšetříme zvlášť f na $H(G)$)
 - bod $H(M)$ lze vyjádřit jako bod závislý na méně proměnných $\implies$ dosadím jej do f a zkoumám dál
- porovnám hodnoty ve všech bodech podezřelých z extrémů a vyberu největší a nejmenší.
 - M komp. $\implies$ jde o maxima a minima
 - M omezená, ale ne komp. $\implies$ zkoumám na $\overline{M}$ a pokud extrémy vyjdou v bodech, které nejsou v M , tak jde pouze o infima/superema
 - M neomezená $\implies$ je třeba nějakým trikem ukázat, že jde skutečně o maximum/minimum (odhady, pomocí derivací apod.).

Věta 14 (o nabývání extrémů). Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná kompaktní množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, pak f na M nabývá svého maxima i minima.

Věta 16 (nutná podmínka lokálního extrému). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je ot. mn., $a \in G$ a funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ má v a lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Věta 24 (Lagrangeova věta o multiplikátoru). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G: g(x) = 0\}$ a nechť $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) $\nabla g(\tilde{x}) = \mathbf{o}$,

(II) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \lambda \nabla g(\tilde{x}) = \mathbf{o}$.

Věta 25 (Lagrangeova věta o dvou multiplikátorech). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $f, g_1, g_2 \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G: g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ a nechť bod $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(I) existuje $k \in \mathbb{R}$ t.ž. $\nabla g_1(\tilde{x}) = k \nabla g_2(\tilde{x})$

(II) existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \alpha \nabla g_1(\tilde{x}) + \beta \nabla g_2(\tilde{x}) = \mathbf{o}$.

Primitivní funkce, určitý integrál (15 bodů)

Definice. Funkce F je *primitivní funkce* na otevřeném neprázdném intervalu I k funkci f , pokud $F' = f$ na celém I . Značíme $\int f \stackrel{c}{=} F$, respektive $\int f(x)dx \stackrel{c}{=} F(x)$.

Věta (linearita integrálu). Necht' f, g jsou spojité funkce a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int af(x) + bg(x)dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx.$$

Věta (per partes). Necht' u, v jsou spojité funkce na I . Pak platí

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

Věta (substituce). Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a φ diferencovatelná funkce na (α, β) . Je-li $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, pak platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) \text{ pro } x \in (\alpha, \beta).$$

Parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky

- funguje v případě, že čítec je nižšího řádu, než jmenovatel - pokud tomu tak není, tak nejdřív provedeme dělení polynomu polynomem
- jmenovatele rozložím na součin - co nejvíc to jde, dostanu nejvýše kvadratické činitele
- napíšu *zadaný zlomek* = součet zlomků takto:

$$\text{– ve jmenovateli je } (ax + b)^n \implies \text{napravo napíšu } \frac{A_1}{ax+b} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$\text{– ve jmenovateli je } (ax^2 + bx + c)^n \implies \text{napravo napíšu } \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

- získanou rovnici přenásobím jmenovatelem
- upravím do tvaru $\dots = (\dots)x^n + (\dots)x^{n-1} + \dots + (\dots)x + (\dots)$
- provonám koeficienty u stejných mocnin $x \rightarrow$ soustava
- vyřeším soustavu $\rightarrow$ dostanu hodnoty A_i, B_i

Poznámka. Při rozkladu jmenovatele: pokud kvadratický trojčlen lze rozložit na součin, tak jej rozložím (jinak by mohl vyjít zlomek, který nelze zintegrovat).

Návod/nápověda

- čítec alespoň stejného stupně, než jmenovatel $\rightarrow$ dělení mnohočlenu mnohočlenem
- rozklad na parciální zlomky
- $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{1}{ax^2+b} dx \rightarrow$ substitucí převedeme na $\int \frac{1}{y^2+1} dy$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ doplněním na čtverec, převedeme na předchozí případ
- $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow \int \frac{1}{(u^2+1)^n} \rightarrow$ substituce $u = \tan t$

Goniometrické substituce, odmocniny

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}$
 - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).

Lepení

Věta (Lepení). Nechť I je neprázdný otevřený interval, $f, F: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $c \in I$ a pro každé $x \in I \setminus \{c\}$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom $F' = f$ na I .

Jak lepit

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c, f: (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Budiž $F_1: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, G_1: (b, c) \rightarrow \mathbb{R}$ spojité t.ž. $F'_1 = f$ na (a, b) a $F'_2 = f$ na (b, c) .

Pak nalezneme konstantu $K \in \mathbb{R}$ t.ž. $F_1(b-) + K = F_2(b+)$.

$$\text{Definujeme funkci } F(x) := \begin{cases} F_1(x) + K, & x \in (a, b) \\ F_1(b-) + K, & x = b \\ F_2(x), & x \in (b, c). \end{cases}$$

Pak $F' = f$ na (a, c) .

Určitý integrál

Definice (Určitý integrál). Necht' $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a F ke primitivní funkce k f na (a, b) . Pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a+),$$

kde

$$F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x),$$

pokud limity i jejich rozdíl existují jako prvky $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Značení. $[F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+)$, navíc pro $a < b$ definujeme $[F(x)]_b^a$ jako $-[F(x)]_a^b$.

Poznámka. Některé integrály na nekonečných intervalech vychází konečně, jiné nekonečně. Např. lze ukázat: $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$ a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty$.

Věta (Aditivita integrálu). Necht' $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a < c < b$.

(i) Pokud existuje $\int_a^b f(x)dx$, pak existují i $\int_a^c f(x)dx$ a $\int_c^b f(x)dx$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(ii) Pokud existují $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ a f je v c spojitá, pak existuje i $\int_a^b f(x)dx$ a je roven $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta (Substituce pro určitý integrál). Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ φ je diferencovatelná na intervalu (α, β) a ryze monotónní a F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = [F(y)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

Může se hodit

Limita složené funkce: Bud' $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a jsou f a g funkce. Necht' platí, že $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = D$ a $\lim_{x \rightarrow D} f(x) = A$. Necht' platí alespoň jedna z podmínek:

(P) $\exists \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta) : g(x) \neq D$,

(S) f je spojitá v D .

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Známé limity

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$